PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4h)

Dans tout le problème, E désigne l'ensemble des suites réelles décroissantes à termes positifs non tous nuls ; autrement dit, tout élément $u \in E$ est une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ et $u_n \geqslant u_{n+1}$.

A la suite $u \in E$ on associe la fonction U définie par

$$x \longmapsto U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n x)^n$$

pour tout x réel pour lequel la série précédente est convergente (on convient que $(u_0 x)^0 = 1$ pour tout x réel).

S désigne la partie de E constituée des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général u_n converge.

T désigne la partie de E constituée des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la fonction U associée à u soit définie sur $\mathbb{R}$ et que de plus l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \text{Log } U(x) \frac{dx}{x^2}$ soit convergente.

On rappelle, sans en demander de démonstration, la formule de Stirling

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} = 1$$

I

1 - a) Soit $u \in E$, $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que la fonction U associée à u est définie sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

.../...

b) En posant, pour tout $\lambda \in]0, +\infty[$, $\lambda u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $u \in T$ équivaut à $\lambda u \in T$.

2 - a) Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de E tels que $u_n \geqslant v_n$ pour tout n . Montrer que l'appartenance de u à T entraîne celle de v à T .

b) Soient u et v deux éléments de E tels que v_n soit non nul pour tout n et que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Etablir l'équivalence

$$u \in T \Longleftrightarrow v \in T \ .$$

3 - Montrer que les trois suites u , v , w définies par

$$u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad u_0 = 1 \quad \text{et,} \quad \forall\, n \geqslant 1 \ , \quad u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n\,!}}$$

$$v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad v_0 = 1 \quad \text{et,} \quad \forall\, n \geqslant 1 \ , \quad v_n = \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)\,!}}$$

$$w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad w_0 = 1 \quad \text{et,} \quad \forall\, n \geqslant 1 \ , \quad w_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$$

appartiennent à E . Etudier les appartenances éventuelles de chacune de ces suites à S et à T .

II

1 - Déterminer à l'aide de sa borne supérieure, qu'on calculera, l'ensemble des nombres réels t strictement positifs tels que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, t^n$ soit convergente et de somme inférieure ou égale à 1 .

2 - Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à S .

a) Montrer que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ est convergente.

b) Montrer que la suite $(n\,u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ; quelle est sa limite ?

c) Etablir la convergence pour tout x réel de la série $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(u_n\, x)^n$ ainsi qu'une relation entre les fonctions U et F .

.../...

3 - Dans cette question, on suppose que $u \in S$ et que, de plus, pour tout n, u_n est non nul.

a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0, \frac{1}{3u_{n+1}}]$ on a

$$F(x) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} k (u_k x)^k \qquad \text{et} \qquad \frac{F(x)}{U(x)} \leqslant n .$$

b) En déduire la convergence de la série de terme général $\alpha_n = \int_{\frac{1}{3u_n}}^{\frac{1}{3u_{n+1}}} \frac{F(x)\,dx}{U(x)\,x^2}$

ainsi que celle de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{F(x)\,dx}{U(x)\,x^2}$.

c) Montrer que $\int_1^{+\infty} \log U(x) \frac{dx}{x^2}$ converge.

4 - Etablir l'inclusion $S \subset T$.

III

1 - Pour toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, on pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $m \leqslant n$ entraîne $s_m - m\,u_{n+1} \leqslant s_n - n\,u_{n+1}$.

2 - Dans cette question, on suppose que la suite $u \in E$ a une limite nulle et que la série de terme général u_n diverge.

a) Montrer que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ diverge (on pourra raisonner par l'absurde).

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in [\frac{e}{u_n}, +\infty[$, montrer que $\operatorname{Log} U(x) \geqslant n$.

c) En déduire la divergence de la série de terme général

$\beta_n = \int_{\frac{e}{u_n}}^{\frac{e}{u_{n+1}}} \operatorname{Log} U(x) \frac{dx}{x^2}$ et celle de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \operatorname{Log} U(x) \frac{dx}{x^2}$.

3 - Comparer les ensembles S et T .

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail